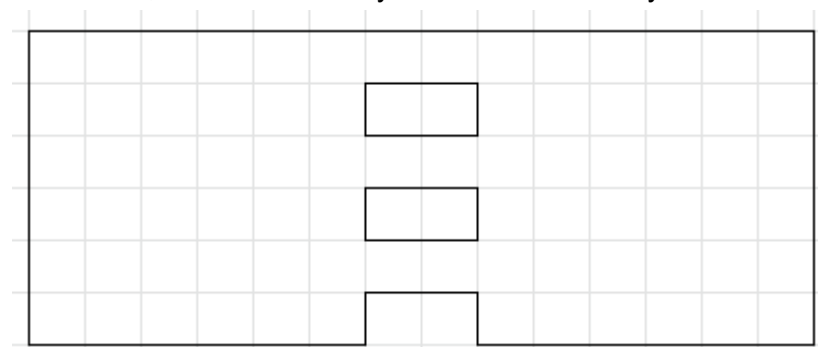


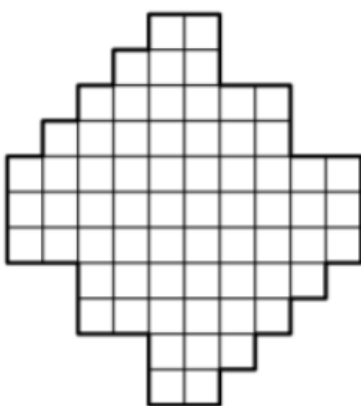
Ťažká enumeračná kombinatorika

Enumerácia na mriežke

1. Koľkými spôsobmi môžeme zafarbiť políčka tabuľky 2×7 zelenou a žltou farbou tak, aby sa v tabuľke nenachádzalo zelené ani žlté L-ko? (L-ko je zahnutý útvar z troch políčok)
2. Každé políčko tabuľky 2×13 ofarbíme jednou zo štyroch farieb. Koľkými spôsobmi to môžeme spraviť tak, aby žiadne dve stranou susedné políčka neboli ofarbené rovnakou farbou?
3. Dokážte, že sa nasledovný tvar sa dá dominovými kockami vydláždiť n^2 spôsobmi:



4. Určite, koľkými spôsobmi možno nasledovný útvar vydláždiť dominovými kockami:



Ťažké zoradovanie

5. Desať vedúcich sedelo za okrúhlym stolom počas raňajok na miestach očíslovaných od 1 do 10. Na obede si však posadali iným spôsobom, a hneď sa na to niektorí začali sťažovať. Jeden z nich im však oponoval, že to nie je také hrozné - veď každý sedí nanajvýš jedno miesto od toho, kde bol na raňajkách. Koľkými rôznymi spôsobmi sa mohli vedúci na obede povymieňať?
6. K okrúhlemu stolu sme prestreli 5 červených, 5 zelených a 5 modrých tanierov. Koľkými rôznymi spôsobmi sme to mohli urobiť? (Všetky rozloženia líšiace sa otočením stola považujeme za jednu možnosť)

7. Majme n kladných celých čísel od 1 až po n . Vytvoríme z nich postupnosť $a_1, a_2, \dots, a_n$ tak, že využijeme všetky čísla. Koľkými spôsobmi to môžeme urobiť tak, že bude platiť:
 $a_1 \leq 2a_2 \leq 3a_3 \leq \dots \leq na_n$?

Dôkaz sporom enumeráciou

8. V tíme je 7 hráčov. V každom zápase turnaja 5 z nich hrá, a dvaja striedajú. Dokážte, že nezávisle od počtu kôl aj výberu päťíc je možné na konci turnaja nájsť dvoch hráčov, ktorí boli spolu (obaja hrali alebo striedali) počas viac ako polovice zápasov.

9. Na stretnutí cestovateľov sa zúčastnilo 200 ľudí. Aspoň 120 z nich už navštívilo Európu, aspoň 120 navštívilo Áziu, a rovnako to platí aj pre Austráliu, Afriku a Severnú aj Južnú Ameriku. Dokážte, že medzi cestovateľmi sa nájde taká dvojica, že každý svetadiel navštívil aspoň jeden cestovateľ z tejto dvojice.

Ďalšie úlohy

10. Pri platení za nákup, ktorý stál 20,26€ sme použili iba mince 1c., 10c. 1€ a bankovku 10€. Koľkými rôznymi spôsobmi sme mohli zaplatiť?

11. Na najviac koľko oblastí vieme rozdeliť rovinu n priamkami?

12. Koľkými spôsobmi vieme čísla z množiny $\{1, 2, \dots, 2n\}$ popárovať do n dvojíc tak, aby súčet každej dvojice bol o jedna väčší ako mocnina čísla 2? Určite pre každé n .

Zdroje:

1. Mat. náboj 2016 - 34
2. MO C 2018/19 - DK 4
3. MO A 2019/20 - ŠK 3 (doplňujúca úloha)
4. MO A 2019/20 - KK 4
5. KMS 06/07 L1-5
6. Neznáme (vzorák je deliť 15 rotáciami až po odpočítaní periodických (skupiny po 3))
7. Výberko 20/21
8. KK MOA 24/25
9. Zbierka KMS
10. KMS 04/05 Z1-4
11. Zbierka KMS
12. CPSJ 25/26